donc $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ce qui entraîne que f est continue en 0 et par suite f est continue sur **R**.

b) La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{e^x - 1}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}^*$.

* ***Etudions la dérivabilité de f en*** 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2}{e^x-1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\dfrac{e^x-1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$ et par conséquent f est dérivable sur **R**.

$$* f'(x) = \frac{2x(e^x-1) - e^x x^2}{(e^x-1)^2} = \frac{x\left[2e^x - 2 - xe^x\right]}{(e^x-1)^2} = \frac{x\varphi(x)}{(e^x-1)^2}$$

c) on a : $\varphi(a) = 0 \Rightarrow e^a(2-a) - 2 = 0 \Rightarrow e^a = \dfrac{2}{2-a}$

or $f(a) = \dfrac{a^2}{e^a - 2}$ d'où $f(a) = \dfrac{a^2}{\dfrac{2}{2-a} - 1} = a(2-a)$

d) Le signe de $f'(x)$ est celui de $x\varphi(x)$.

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
$\varphi(x)$	-		0	+	0	-	
x	-		0	+		+	
$\varphi'(x)$	+		0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	a(2-a)	↘	0

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{e^x - 1} = -\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$